

§16 Metrische und normierte Räume

-139-

ergeben sich durch Abstraktion aus bekannten Konzepten wie dem

- Abstand von Punkten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

- Abstand von Funktionen $f, g \in$

$C^0([a, b])$ bzgl. der Normen

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{[a, b]} |f| = \max_{[a, b]} |f|,$$

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Def 16.1 : Sei X eine beliebige Menge.

Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

heißt eine Metrik auf X , falls gilt:

(i) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$

(ii) Definitheit: $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii) Dreiecksungl.: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

für alle $x, y, z \in X$. Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum.

Bem: 1.) Da man sich d als Abstandsmessung vorstellt, sind die Forderungen i)-iii) sinnvoll!

2.) Es gilt stets $d(x, y) \geq 0$.

denn: $0 \stackrel{(ii)}{=} d(x, x) \underset{(iii)}{\leq} d(x, y) + d(y, x)$

(i) $\geq d(x, y)$

3.) Sei $A \subset X$. Dann ist (A, d_A) mit $d_A(x, y) := d(x, y)$ für $x, y \in A$ ein metrischer Raum ($d_A = \underline{\text{Einschränkung von } d}$)

Beispiele: 1.) $X := \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x - y|$
(Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$)

2.) $X := \mathbb{C}$, $d(z, w) := |z - w| = \left((w_1 - z_1)^2 + (w_2 - z_2)^2 \right)^{1/2}$
Euklidische Metrik in der komplexen Ebene

3.) nicht interessant: $X = \text{beliebige Menge}$
$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

□

Viele metrische Räume werden in spezieller Weise erzeugt:

Def 16.2 : normierte Räume

Sei X ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine

Norm auf X , falls :

$$(i) \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (\text{Definitheit})$$

$$(ii) \quad \|cx\| = |c| \|x\| \quad (\text{Homogenität})$$

$$(iii) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecksungl.})$$

für alle $x, y \in X$, $c \in \mathbb{K}$. Das Paar

$(X, \|\cdot\|)$ heißt ein normierter Raum.

Bem : $d_X(x, y) := \|x - y\|$ ist ^{dann} eine Metrik
auf X , genannt die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik.

Beispiele : 1.) Sei $X := \mathbb{R}^n$. Man setzt:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \in [1, \infty): \quad \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \\ p = \infty: \quad \|x\|_\infty := \max \{ |x_i| : i=1, \dots, n \} \end{array} \right. \quad -143-$$

p -Norm auf $\mathbb{R}^n$ (für $n=1$ alle p -Normen gleich)

Lemma: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist für $1 \leq p \leq \infty$ ein normierter Raum.

Bem: $p=2$ Euklidische Norm

Bew: Die Fälle $p \in \{1, \infty\}$ sind klar (benutze Eigenschaften des Absolutbetrags auf $\mathbb{R}$!).

Sie also $p \in (1, \infty)$. Alles ist offensichtlich bis auf

$$(*) \quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

ad $\circledast$: Es gilt

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq$$

$$|x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq$$

$$\circledast\circledast \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

Wir benutzen jetzt die

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ungleichung} \\ \text{von Hölder} \\ \left(p' := \frac{p}{p-1} \right) \\ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n |\alpha_i \beta_i| \leq \\ \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^{p'} \right)^{1/p'} \\ = \|\alpha\|_p \|\beta\|_{p'} \end{array} \right.$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \quad -145-$$

(vgl. Analysis I, Skript p. 202)

Mit dieser Ungl. und $(**) \circledast$ folgt:

$$\|x+y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i+y_i|^{p-1} +$$

$$\sum_{i=1}^n |y_i| |x_i+y_i|^{p-1} \leq$$

$$\|x\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} +$$

$$\|y\|_p \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} =$$

$$\|x\|_p \|x+y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \|x+y\|_p^{p-1} =$$

$$\|x+y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p).$$

Im Fall $\|x+y\|_p = 0$ ist nichts zu zeigen. Andernfalls folgt die Beh. nach Division durch $\|x+y\|_p^{p-1}$.



Wichtiger Spezialfall: $p = 2$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad \underline{\text{Euklidische Norm}}$$

Wir schreiben abkürzend einfach

$$|x| \quad \text{für } \|x\|_2.$$

Die Euklidische Norm kommt vom

Skalarprodukt $x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i,$

d.h. $|x| = (x \cdot x)^{1/2}.$

2) Sei M eine beliebige Menge,
man setzt

$$X := \left\{ f: M \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_M |f| < \infty \right\}$$

(die beschränkten Funktionen $M \rightarrow \mathbb{R}$)

Dann gilt:

Mit $\|f\|_\infty := \sup_M |f|$
ist $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter
Raum.

analog: für $f: M \rightarrow \underline{\mathbb{R}}^n$ sei

$$\|f\|_p := \sup_{x \in M} \|f(x)\|_p \in [0, \infty]$$

wobei $1 \leq p \leq \infty$; siehe

$$X_p := \left\{ f: M \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|f\|_p < \infty \right\}$$

$\Rightarrow (X_p, \|\cdot\|_p)$ normierter V.R.

Bemerkung: der Index p bei

$\|f\|_p$ kommt nur dann ~~aus~~ ins

Spiel, wenn $(n > 1)$ ist! Für

$n = 1$ gilt stets

$$\|f\|_p = \sup_{x \in M} \underbrace{|f(x)|}_{\text{Absolutbetrag}}$$

~~für ein Int~~

~~3) Sei $X := C^0([a, b])$~~

3) Sei $X := C^0([a, b])$.

Für $f \in X$ ist bekanntlich

$$\|f\|_{L^\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty,$$

also $(X, \|\cdot\|_{L^\infty})$ normierter Raum.

Sei $1 \leq p < \infty$ und

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Lebesgue'sche p-Norm

Lemma :

$\|\cdot\|_{L^p}$ ist eine Norm auf $C^0([a, b])$.

Beweis: nur Δ -Ungl., Rest klar!

Die Δ -Ungl. lautet hier

$$(*) \left(\int_a^b |f+g|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p dx \right)^{1/p}$$

und ist für $p=1$ offensichtlich. Allgemein approximiert man die Integrale durch Riemannsche Summen und benutzt

$$\left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i + \beta_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m |\beta_i|^p \right)^{1/p}$$

für Zahlen α_i, β_i , $i=1, \dots, m$,

mit beliebigem $m \in \mathbb{N}$.

(hier: $\alpha_i = f(x_i) \cdot \Delta x_i$, $\beta_i = g(x_i) \Delta x_i$
für Teilpunkte x_i) □

ab jetzt: $(X, d) = \text{metrischer Raum}$

Def 16.3: a) Für $a \in X$ und $r > 0$

heißt $B_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$

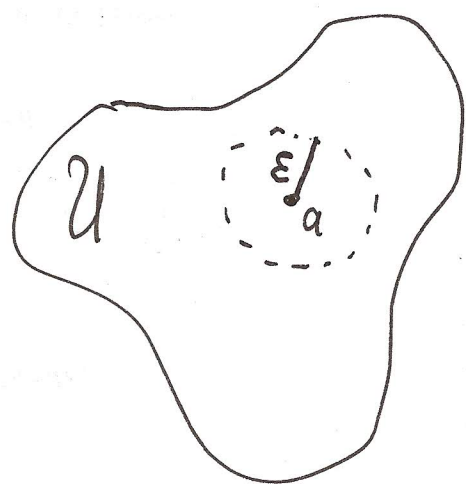
die offene Kugel um a mit Radius r .

b) Sei $a \in X$. Eine Menge $U \subset X$

heißt eine Umgebung von a , falls

$$B_\varepsilon(a) \subset U$$

für ein $\varepsilon > 0$.



Bem: 1.) Die offene Kugel

$B_\varepsilon(a)$ ist für alle $\varepsilon > 0$ Umgebung von a .

2.) In metrischen Räumen gilt das

Trennungsaxiom von Hausdorff:

Zu $x \neq y$ aus X gibt es Umgebungen $U(x)$ und $U(y)$ von x und y mit

$$U(x) \cap U(y) = \emptyset$$

Beweis: $x \neq y \implies d(x, y) > 0$; wähle

$$r := \frac{1}{2} d(x, y) \text{ und setze}$$

$$U(x) := B_r(x), U(y) := B_r(y)$$

□

Def 16.4: a) $A \subset X$ heißt offene Menge

: $\iff$ für jedes $x \in A$ ist A Umgeb-
ung von x ($\iff \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$)

b) $B \subset X$ heißt abgeschlossene Menge

$$: \iff X - B \text{ offen}$$

Satz 16.1: i) $B_r(a)$ ist eine offene

Menge (die Bezeichnung offene Kugel ^{ist} also korrekt).

ii) $\emptyset$ und X sind sowohl offen als auch abgeschlossen.

iii) Endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen.

iv) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ beliebige Familie offener
Mengen $U_\alpha \subset X \implies \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ offen

Beweis: i) Sei $x \in B_r(a)$; setze

$$\varepsilon := r - d(x, a) > 0 \implies$$

$$B_\varepsilon(x) \subset B_r(a) \quad (*)$$

ad (*): Sei $y \in B_\varepsilon(x) \implies$

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) <$$

$$\varepsilon + d(x, a) = r \implies y \in B_r(a)$$

[(*) sagt: $B_r(a)$ ist Umgebung von $x \xrightarrow[\text{offen}]{\text{Def.}}$
 $B_r(a)$ offene Menge.]

ii) $\emptyset$ offen: klar! " für alle $x \in \emptyset$
 " ist $\emptyset$ Umgebung von x

Def. $\implies X = X - \emptyset$ abgeschlossen,

klar: X offen

Def. $\implies \emptyset = X - X$ abgeschlossen

iii) Seien $O_1, \dots, O_m \subset X$ offen,

$$O := \bigcap_{i=1}^m O_i.$$

$$\text{Sei } x \in O \xrightarrow[\text{offen}]{O_i} \exists r_i > 0 \text{ mit } B_{r_i}(x) \subset O_i$$

$i = 1, \dots, m$

Mit $r := \min \{r_1, \dots, r_m\}$ folgt: $B_r(x) \subset O$

Also ist O Umgebung eines jeden Punktes.

(überlege ein Gegenbspl. für $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$!)

$$\text{Z.B. : } O_i := \left(-\frac{1}{i}, 1 + \frac{i}{n}\right) \Rightarrow$$

$$O := \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i = [0, 1]$$

iv) selbst probieren !

Zu zeigen: Zu jedem $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ gibt

es eine Kugel $B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.



-155-

Bemerkungen: 1) oft gemachter Fehlschluss

// $A \subset X$ nicht offen $\Rightarrow A$ abgeschlossen

M. a. W.: „abgeschlossen“ ist nicht das Gegen-
teil von „offen“ !

Z.B. : $\begin{cases} \mathbb{R} := X, \quad d(x, y) := |x - y|, \\ A := [0, 1) \text{ weder offen noch abge-} \\ \text{schlossen.} \end{cases}$

10^{ter} Termin

2.) Offene Mengen in $\mathbb{R}^n$

Erinnerung: $\|x\|_{\infty} := \max \{ |x_i| : i = 1, \dots, n \}$

$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$

für Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n),$